無限集合上の関数環 K^X の代数的・幾何学的構造の完全な分類

代数学、位相空間論、そして代数幾何学が美しく交差する古典的な結果として、無限集合上の体への関数がなす可換環 $A = K^X$ のイデアル構造および素スペクトル（Spec）の構造は、集合論的な性質や「フィルター」の概念を用いて完全に記述・分類することができます。

本稿では、この構造論の根底にある **von Neumann 正則環** の性質から、イデアルとフィルターの完全な 1 対 1 対応、そして $\mathrm{Spec}(A)$ の幾何学的な構造（各点における局所環や剰余体、構造層の記述を含む）にいたるまで、一切の要約を排除し、自己完結的（self-contained）な詳細な証明とともに解説します。

1. 基礎定義と準備

環 A の定義

X を無限集合、K を任意の体とします。X から K への関数全体からなる集合 $A = K^X$ は、各点ごとの演算によって可換環となります。

- **和:** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- **積:** $(fg)(x) = f(x)g(x)$

零元 0 はすべての $x \in X$ に対して $0(x) = 0$ となる定数関数、単位元 1 はすべての $x \in X$ に対して $1(x) = 1$ となる定数関数です。

零点集合（Zero set）

関数 $f \in A$ に対して、その値が 0 になる点の集合を $Z(f)$ と表記します。

$$Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

フィルター（Filter）の定義

X の部分集合の族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ が以下の3条件を満たすとき、$\mathcal{F}$ を X 上のフィルターと呼びます。（※環の全体 A との対応づけを完全にするため、$\varnothing \in \mathcal{F}$ となる不適切なフィルター（improper filter、すなわち $\mathcal{P}(X)$ 全体）も含めて定義します。）

1. **全体集合の含有:** $X \in \mathcal{F}$
2. **有限交差の閉包:** $S_1, S_2 \in \mathcal{F} \implies S_1 \cap S_2 \in \mathcal{F}$
3. **上位集合の閉包:** $S_1 \in \mathcal{F}$ かつ $S_1 \subseteq S_2 \subseteq X \implies S_2 \in \mathcal{F}$

2. von Neumann 正則環（von Neumann Regular Ring）

本稿で扱う関数環 $A = K^X$ の強力な代数的性質を保証するのが、John von Neumann によって導入された正則環の概念です。

von Neumann 正則環の定義

単位元を持つ可換環 R が **von Neumann 正則環** であるとは、任意の元 $a \in R$ に対して、ある元 $x \in R$ が存在して、次の条件を満たすことをいう。

$$a = a^2 x \quad (\text{または等価に } a = axa)$$

von Neumann 正則環の理解に役立つ例と非例

1. 体 K （最も基本的な例）

任意の体 K は von Neumann 正則環です。なぜなら、任意の $a \in K$ に対して：

- $a \neq 0$ ならば、体の定義より逆元 a^{-1} が存在するため、$x = a^{-1}$ とおけば $a^2 x = a^2 a^{-1} = a$ となり成り立ちます。
- $a = 0$ ならば、$x = 0$ とおけば $0 = 0^2 \cdot 0$ となり成り立ちます。

2. 体の直積環 K^X （本稿の主役）

本稿で扱う $A = K^X$ も von Neumann 正則環です。元 $f \in A$（すなわち関数）に対して、元 $g \in A$ を次のように各点ごとに定義します。

$$g(x) = \begin{cases} f(x)^{-1} & (f(x) \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (f(x) = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき、各点 $x \in X$ について計算すると、 $f(x) \neq 0$ のときは $f(x)^2 g(x) = f(x)^2 f(x)^{-1} = f(x)$ となり、$f(x) = 0$ のときは $0^2 \cdot 0 = 0 = f(x)$ となります。したがって、環の元として $f = f^2 g$ が至る所成り立ち、A は von Neumann 正則です。

3. 整数環 $\mathbb{Z}$ （非正則環の例）

整数環 $\mathbb{Z}$ は von Neumann 正則環では**ありません**。例えば $a = 2 \in \mathbb{Z}$ を考えます。正則環の定義を満たすには $2 = 2^2 \cdot x = 4x$ となる整数 $x \in \mathbb{Z}$ が存在しなければなりませんが、これを満たす整数は存在しないためです（有理数体 $\mathbb{Q}$ まで広げれば $x = 1/2$ が存在します）。

3. 鍵となる補題：指示関数の構成

von Neumann 正則性により、任意の関数はその零点集合の情報（サポートの補集合）を完全に保ったまま、値が 0 か 1 しか取らないべき等元（指示関数）に取り替えることができます。

【補題】イデアルと指示関数

任意の $f \in A$ に対して、指示関数 $e_f \in A$ を次のように定義する。

- $f(x) \neq 0$ のとき、$e_f(x) = 1$
- $f(x) = 0$ のとき、$e_f(x) = 0$

このとき、任意のイデアル $I \subseteq A$ と任意の関数 $f \in A$ に対して以下が成り立つ。

$$f \in I \iff e_f \in I$$

証明:

($\Longrightarrow$) 前述の von Neumann 正則性の例で構成した関数 $g \in A$ （$f(x) \neq 0$ のとき $f(x)^{-1}$、そうでないとき 0）を考える。各点において演算を行うと、明示的に $(fg)(x) = e_f(x)$ となるため、環の元として $fg = e_f$ である。I はイデアルであり $f \in I$ なので、イデアルの積の吸収律より $fg = e_f \in I$ となる。

($\Longleftarrow$) 指示関数の定義より、すべての $x \in X$ において $f(x) = f(x)e_f(x)$ が成り立つため、環の元として $f = fe_f$ である。I はイデアルであり $e_f \in I$ なので、再び吸収律より $fe_f = f \in I$ となる。

■

4. イデアルとフィルターの全単射の証明

環 A のイデアル全体と、集合 X 上のフィルター全体の間に 1 対 1 の対応が存在することを示します。以下の2つの写像 Φ と Ψ を構成します。

4.1 フィルターからイデアルへの写像 Φ

X 上のフィルター $\mathcal{F}$ が与えられたとき、$\Phi(\mathcal{F}) = I_{\mathcal{F}}$ を以下で定義します。

$$I_{\mathcal{F}} = \{f \in A \mid Z(f) \in \mathcal{F}\}$$

証明（$I_{\mathcal{F}}$ がイデアルであること）：

1. $0 \in I_{\mathcal{F}}$: 0 の零点集合は $Z(0) = X$ である。フィルターの条件1より $X \in \mathcal{F}$ なので、$0 \in I_{\mathcal{F}}$ である。
2. **加法・減法について閉じていること:** $f, g \in I_{\mathcal{F}}$ とすると、定義より $Z(f), Z(g) \in \mathcal{F}$ である。フィルターの条件2より、それらの有限交差もフィルターに属するため $Z(f) \cap Z(g) \in \mathcal{F}$ である。ここで、$(f-g)(x) \neq 0$ となるのは $f(x) \neq g(x)$ のときであり、これは少なくとも $f(x) \neq 0$ または $g(x) \neq 0$ であることを意味する。この対偶をとれば $Z(f) \cap Z(g) \subseteq Z(f-g)$ が成り立つ。フィルターの条件3（上位集合の閉包）より、$Z(f-g) \in \mathcal{F}$ となり、したがって $f - g \in I_{\mathcal{F}}$ である。
3. **吸収律:** $f \in I_{\mathcal{F}}$ および $h \in A$ とする。$Z(f) \in \mathcal{F}$ である。各点において $f(x) = 0 \implies (hf)(x) = 0$ は自明であるから、集合の包含関係として $Z(f) \subseteq Z(hf)$ が成り立つ。フィルターの条件3より $Z(hf) \in \mathcal{F}$ となり、したがって $hf \in I_{\mathcal{F}}$ である。

以上より、$I_{\mathcal{F}}$ は環 A のイデアルの定義を満たす。

■

4.2 イデアルからフィルターへの写像 Ψ

A のイデアル I が与えられたとき、$\Psi(I) = \mathcal{F}_I$ を以下で定義します。

$$\mathcal{F}_I = \{Z(f) \mid f \in I\}$$

証明（$\mathcal{F}_I$ がフィルターであること）：

1. $X \in \mathcal{F}_I$**:** イデアルは部分群であるため必ず零元を含む（$0 \in I$）。$Z(0) = X$ であるため、定義より $X \in \mathcal{F}_I$ である。
2. **上位集合について閉じていること:** $S \in \mathcal{F}_I$ とし、$S \subseteq T \subseteq X$ となる任意の集合 T を考える。定義より $S = Z(f)$ となる $f \in I$ が存在する。ここで、差集合 $X \setminus T$ の指示関数を $e_{X\setminus T} \in A$ とする（T 上で 0、T の外で 1）。$S \subseteq T$ より、補集合の間には $X \setminus T \subseteq X \setminus S$ という包含関係が成り立つ。これより、$e_{X\setminus T}(x) \neq 0 \implies x \notin T \implies x \notin S \implies f(x) \neq 0$ がいえる。そこで、新しい関数 $h \in A$ を、$f(x) \neq 0$ のときは $h(x) = e_{X\setminus T}(x)f(x)^{-1}$、$f(x) = 0$ のときは $h(x) = 0$ と定義する。すると、各点での計算により $hf = e_{X\setminus T}$ となる。$f \in I$ であり I はイデアルであるから、$hf = e_{X\setminus T} \in I$ となる。この指示関数の零点集合は定義よりまさに T である（$Z(e_{X\setminus T}) = T$）。したがって $T \in \mathcal{F}_I$ となり、上位集合について閉じている。
3. **有限交差について閉じていること:** $S_1, S_2 \in \mathcal{F}_I$ とする。定義より $S_1 = Z(f), S_2 = Z(g)$ となる $f, g \in I$ が存在する。上記の【補題】より、それらの指示関数について $e_f, e_g \in I$ も成り立つ。ここで、関数 $k = e_f + e_g - e_f e_g$ を構成する。I はイデアルであるため、加法と積の吸収律から $k \in I$ である。$k(x) = 0$ となる条件を考えると、$e_f(x), e_g(x) \in \{0, 1\}$ であることから、$k(x) = 0 \iff e_f(x) = 0$ かつ $e_g(x) = 0 \iff x \in S_1$ かつ $x \in S_2 \iff x \in S_1 \cap S_2$ となる。すなわち、$Z(k) = S_1 \cap S_2$ である。$k \in I$ より、その零点集合である $S_1 \cap S_2 \in \mathcal{F}_I$ となり、有限交差について閉じている。

以上より、$\mathcal{F}_I$ は X 上のフィルターの定義を満たす。

■

4.3 互いに逆写像であること（全単射性）の証明

証明:

1. $\mathcal{F}_{I_\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ の証明

($\subseteq$) $S \in \mathcal{F}_{I_\mathcal{F}}$ とする。定義より $S = Z(f)$ となる $f \in I_\mathcal{F}$ が存在する。$I_\mathcal{F}$ の定義から $Z(f) \in \mathcal{F}$ であるため、そのまま $S \in \mathcal{F}$ となる。
($\supseteq$) $S \in \mathcal{F}$ とする。補集合の指示関数 $e_{X\setminus S}$ を考えると、その零点集合は $Z(e_{X\setminus S}) = S$ である。仮定より $S \in \mathcal{F}$ であるから、$Z(e_{X\setminus S}) \in \mathcal{F}$ となり、写像の定義から $e_{X\setminus S} \in I_\mathcal{F}$ である。したがって、その零点集合である S は $\mathcal{F}_{I_\mathcal{F}}$ に属する。

2. $I_{\mathcal{F}_I} = I$ の証明

($\subseteq$) $f \in I_{\mathcal{F}_I}$ とする。定義より $Z(f) \in \mathcal{F}_I$ である。$\mathcal{F}_I$ の定義を紐解くと、零点集合がこれに一致するようなある元 $g \in I$ が存在することがわかる（$Z(f) = Z(g)$）。【補題】より、$g \in I \implies e_g \in I$ である。ここで、零点集合が全く同一（$Z(f) = Z(g)$）であるため、それらから作られる指示関数も完全に同一となる（$e_f = e_g$）。よって $e_f \in I$ が成り立ち、再び【補題】を用いることで $f \in I$ が導かれる。
($\supseteq$) $f \in I$ とすると、写像 Ψ の定義から直ちに $Z(f) \in \mathcal{F}_I$ である。すると写像 Φ の定義から、$Z(f) \in \mathcal{F}_I \implies f \in I_{\mathcal{F}_I}$ となり、包含関係が成り立つ。

以上から、写像 Φ と Ψ は互いに逆写像であり、イデアル全体とフィルター全体の間に 1 対 1 対応があることが証明された。

■

5. イデアルとフィルターの対応辞書および具体例

この 1 対 1 対応を仲介役とすることで、環論的な代数構造と、集合論的なフィルターの構造を完全に同一視して翻訳することができます。

フィルターの種類	集合論的な直感の意味	対応するイデアルの特徴	代数的な性質
真のフィルター ($\varnothing \notin \mathcal{F}$)	空集合を含まない適切な集合族	$I \subsetneq A$	真のイデアル
単項フィルター $\mathcal{F}_Y$	特定の部分集合 Y を包む集合の全体	$I_Y = \{f \in A \mid f\|_Y = 0\}$	一般のイデアル
極大フィルター（超フィルター）	これ以上大きくできない適切なフィルター	$p \subseteq A$	**極大イデアル**（かつ素イデアル）

詳細な4つの具体例

例1：特定の1点を含む集合のフィルター（単項超フィルター）

X の特定の1点 $x_0 \in X$ を固定します。x_0 を要素として含むような X の部分集合をすべて集めた族 $\mathcal{F}_{x_0} = \{S \subseteq X \mid x_0 \in S\}$ を考えます。これは「単項超フィルター（Principal ultrafilter）」と呼ばれる極大フィルターです。

これに対応するイデアルを定義に従って求めると、 $Z(f) \in \mathcal{F}_{x_0} \iff x_0 \in Z(f) \iff f(x_0) = 0$ となるため、次のようになります。

$$I_{x_0} = \{f \in A \mid f(x_0) = 0\}$$

これは**「点 x_0 での値が 0 になる関数全体」**のなすイデアルです。このイデアルによる剰余環 A/I_{x_0} は、各関数に x_0 での値を対応させる評価写像を考えることで、体 K と同型になります。剰余環が体になるため、これは代数的に**極大イデアル**です。

例2：一般の部分集合を包むフィルター（単項フィルター）

X の空でない任意の部分集合 $Y \subseteq X$ を固定します。Y を完全に包含するような X の部分集合をすべて集めた族 $\mathcal{F}_Y = \{S \subseteq X \mid Y \subseteq S\}$ を考えます。これは「Y によって生成される単項フィルター（Principal filter）」です。

これに対応するイデアルは、 $Z(f) \in \mathcal{F}_Y \iff Y \subseteq Z(f) \iff \forall x \in Y, f(x) = 0$ となるため、次のようになります。

$$I_Y = \{f \in A \mid f|_Y = 0\}$$

これは**「部分集合 Y の上で恒等的に 0 になる関数全体」**のなすイデアルです。$Y = \{x_0\}$（1点）のときは例1の極大イデアルになり、逆に $Y = X$ のときは「すべての点で 0 になる関数」の集合、すなわち零イデアル $\{0\}$ になります。

例3：補有限フィルター（Fréchet フィルター）

補集合が有限集合（＝高々有限個の点を除いたすべて）であるような X の部分集合をすべて集めた族 $\mathcal{F}_{\mathrm{cf}} = \{S \subseteq X \mid X \setminus S \text{ は有限集合}\}$ を考えます。これは「Fréchet フィルター（Fréchet filter）」と呼ばれます。

これに対応するイデアルを考えると、関数の値が 0 でない点の集合（台集合、サポート） $X \setminus Z(f)$ が有限集合になる関数を集めることになるため、次のようになります。

$$I_{\mathrm{cf}} = \{f \in A \mid f(x) \neq 0 \text{ となる } x \in X \text{ が有限個しか存在しない}\}$$

これは**「有限個の点を除いて、至る所 0 になる関数全体」**のなすイデアルです。例えば $X = \mathbb{N}$（自然数全体）のとき、これは「有限個の項を除いて、先のほうではすべて 0 になる数列の全体」を意味します。このイデアルは、代数的な意味で「有限生成にならない（単項イデアルではない）」重要な例となっています。

例4：自由超フィルター（非単項超フィルター）

Zorn の補題（選択公理）を仮定すると、例3の Fréchet フィルター $\mathcal{F}_{\mathrm{cf}}$ を部分集合として包含するような、極大フィルター（超フィルター） $\mathcal{F}_{\mathrm{free}}$ の存在が示せます。このフィルターはいかなる有限集合も含まず、いかなる1点も含まないという性質を持つため、「自由超フィ

ルター（Free ultrafilter）」と呼ばれます。

これに対応するイデアル $I_{\text{free}} = \{f \in A \mid Z(f) \in \mathcal{F}_{\text{free}}\}$ は、超フィルターに対応するため A の**極大イデアル**です。しかし、例1の I_{x_0} とは異なり、**「いかなる特定の1点での評価でも表すことができない極大イデアル」**になります。このイデアルによる剰余環 A/I_{free} は、数理論理学（モデル理論）や超準解析（Non-standard analysis）において極めて重要な役割を果たします。

6. $\mathrm{Spec}(A)$ の幾何学的構造論

ここからは、可換環 $A = K^X$ の素スペクトル $\mathrm{Spec}(A)$ を代数幾何学的なスキーム（Scheme）とみなしたときの幾何学的構造について、5つの観点から詳細な証明とともに記述します。

(1) 集合としての $\mathrm{Spec}(A)$ の記述

【構造】 集合として $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Max}(A)$ であり、これは X 上の超フィルター全体の集合と 1 対 1 で対応する。

証明:

一般の可換環において $\mathrm{Max}(A) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ は常に成り立つ。逆の包含関係、すなわち「A の任意の素イデアル p が極大イデアルであること」を示すため、剰余環 A/p が体であることを示す。

任意の元 $f \in A$ であって $f \notin p$ となるものをとる。von Neumann 正則性より $f = fe_f$ である（e_f は f の指示関数）。もし $e_f \in p$ であれば $f = fe_f \in p$ となり矛盾するため、$e_f \notin p$ である。

ここで、べき等元の定義より $e_f(1-e_f) = 0$ が成り立つ。$0 \in p$ であり、p は素イデアルであることから、積の定義より $e_f \in p$ または $1 - e_f \in p$ のいずれかが必ず成り立たなければならない。今 $e_f \notin p$ であるため、必然的に $1 - e_f \in p$ となる。

f の擬逆元 g（$fg = e_f$ を満たすもの）を考えると、剰余環 A/p において次が成り立つ。

$$fg = e_f = 1 - (1 - e_f) \equiv 1 \pmod{p}$$

よって、f は A/p において逆元 $g \pmod{p}$ を持つ。任意の非零元が逆元を持つため A/p は体であり、ゆえに p は極大イデアルである。前節の議論により極大イデアル全体は X 上の超フィルター全体と 1 対 1 に対応するため、題意は示された。

■

(2) 位相空間としての $\mathrm{Spec}(A)$ の記述

【構造】 $\mathrm{Spec}(A)$ は、離散位相を入れた X の Stone-Čech コンパクト化 βX に同相である。

証明:

Zariski 位相の基本開集合は $D(f) = \{p \in \mathrm{Spec}(A) \mid f \notin p\}$ で与えられる。f とその指示関数 e_f は互いの倍元（$f = fe_f, e_f = fg$ ）であるため、生成するイデアルが等しく、$D(f) = D(e_f)$ となる。したがって、すべての基本開集合はべき等元 e による $D(e)$ の形で書き表せる。

$e(1-e) = 0$ より、任意の素イデアル p は e か $1 - e$ のどちらか一方のみを必ず含む。したがって、基本開集合 $D(e)$ の補集合は $D(1-e)$ という別の基本開集合になり、これは $D(e)$ が開集合であると同時に閉集合（clopen set）であることを意味する。

1. **Hausdorff 性:** $p \neq q$ を $\mathrm{Spec}(A)$ の異なる2点（極大イデアル）とする。包含関係にないため、ある $f \in p \setminus q$ が存在する。このとき補題より $e_f \in p$ かつ $e_f \notin q$ である。ここで $U = D(1-e_f)$、$V = D(e_f)$ とおくと、$p \in U, q \in V$ であり、かつ $U \cap V = D((1-e_f)e_f) = D(0) = \varnothing$ となるため、Hausdorff 空間の条件を満たす。

2. **コンパクト性:** 可換環論の一般論として、任意の環の素スペクトルは Zariski 位相に関して常に準コンパクト（任意の開被覆が有限部分被覆を持つ）である。Hausdorff 性と合わさることで、$\mathrm{Spec}(A)$ はコンパクト Hausdorff 空間（さらに clopen な基底を持つため Stone 空間）となる。
3. **Stone-Čech コンパクト化 βX の普遍性の証明:** X の各元 x は、単項超フィルターに対応する極大イデアル $p_x = \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ と同一視することで $\mathrm{Spec}(A)$ に埋め込める。X の一元集合 $\{x\}$ の指示関数 $e_{\{x\}}$ を考えると、$D(e_{\{x\}})$ は p_x のみからなる孤立点となるため、X は $\mathrm{Spec}(A)$ の離散部分空間である。また、任意の空でない基本開集合 $D(e_S)$（$S \neq \varnothing$）には必ず $x \in S$ に対応する点 p_x が含まれるため、X は $\mathrm{Spec}(A)$ 内で稠密（ちゅうみつ）である。

   ここで、$\mathrm{Spec}(A)$ が βX の普遍性を満たすこと、すなわち「任意のコンパクト Hausdorff 空間 Y と任意の写像 $\varphi : X \to Y$（X は離散空間なので自動的に連続）が与えられたとき、それが $\mathrm{Spec}(A)$ 上への連続写像 $\tilde{\varphi} : \mathrm{Spec}(A) \to Y$ に一意に拡張できること」を証明する。
   - **拡張の構成:** $\mathrm{Spec}(A)$ の任意の点 p は、X 上の超フィルター $\mathcal{U}_p$ に対応する。Y はコンパクト Hausdorff 空間であるため、超フィルターの像による極限 $\lim_{\mathcal{U}_p} \varphi$ は Y 内にただ1つ存在する。そこで $\tilde{\varphi}(p) = \lim_{\mathcal{U}_p} \varphi$ と定義する。p_x が $x \in X$ に対応する単項超フィルターのとき、極限は自明に $\varphi(x)$ となるため、$\tilde{\varphi}$ は φ の拡張である。
   - **連続性:** $p \in \mathrm{Spec}(A)$ をとり、$y = \tilde{\varphi}(p)$ とする。$V \subseteq Y$ を y の任意の開近傍とする。Y はコンパクト Hausdorff 空間（したがって正則空間）なので、$y \in W \subseteq \overline{W} \subseteq V$ となる開近傍 W が存在する。超フィルター極限の定義より、逆像 $S = \varphi^{-1}(\overline{W})$ は $\mathcal{U}_p$ に属する。ここで基本開集合 $D(e_S) \subseteq \mathrm{Spec}(A)$ を考える。$S \in \mathcal{U}_p$ より $p \in D(e_S)$ である。また、任意の $q \in D(e_S)$ に対して $S \in \mathcal{U}_q$ であるから、$\tilde{\varphi}(q) = \lim_{\mathcal{U}_q} \varphi \in \overline{\varphi(S)}$ となる。$\varphi(S) \subseteq \overline{W}$ であり、$\overline{W}$ は閉集合なので $\overline{\varphi(S)} \subseteq \overline{W} \subseteq V$ である。よって $\tilde{\varphi}(D(e_S)) \subseteq V$ となり、$\tilde{\varphi}$ は連続である。
   - **一意性:** $\mathrm{Spec}(A)$ の中で X は稠密であり、Y は Hausdorff 空間であるため、稠密な部分空間で一致する連続写像は空間全体で一意に定まる。

   以上により、$\mathrm{Spec}(A)$ は βX の普遍性を満たすため、位相空間として βX に同相である。

■

(3) $\mathrm{Spec}(A)$ 上の構造層 $\mathcal{O}$ の記述

【構造】 基本開集合 $D(e_S)$（$S \subseteq X$ は e_S の台集合）における断面の環は $\mathcal{O}(D(e_S)) \cong K^S$ である。すなわち、その開集合に対応する部分集合上の関数環そのものになる。

証明:

スキームの構造層の定義により、基本開集合 $D(e_S)$ 上の断面は、環 A のべき等元 e_S による局所化 A_{e_S}（分母集合 $\{1, e_S, e_S^2, \ldots\}$ による局所化）に等しい。e_S はべき等元（$e_S^2 = e_S$）であるため、分母集合は実質的に $\{1, e_S\}$ のみで閉じている。

可換環論の一般的事実として、べき等元 e による局所化 A_e は、剰余環 $A/(1-e)A$ と自然に同型になる。実際、自然な全射写像 $\pi : A \to A_e$ ($f \mapsto f/1$) の核を考えると、 $f/1 = 0 \iff \exists n \geq 1, e^n f = 0 \iff ef = 0 \iff f = f(1-e) \iff f \in (1-e)A$ となるためである。

ここでイデアル $(1-e_S)A$ は、「補集合 $X \setminus S$ 上の指示関数」を掛けて得られる関数の集まり、すなわち「部分集合 S の上で恒等的に 0 になる関数全体」に他ならない。したがって、このイデアルによる剰余環 $A/(1-e_S)A$ は、各関数を定義域 S 上に制限する自然な写像により、 S 上の関数環 K^S と完全に同型となる。

■

(4) $\mathrm{Spec}(A)$ の各点における剰余体 $\kappa(p)$ の記述

【構造】 点 $p \in \mathrm{Spec}(A)$ に対応する超フィルターを $\mathcal{U}_p$ とするとき、剰余体 $\kappa(p)$ は体 K の $\mathcal{U}_p$ による**超べき（Ultrapower）** $K^X/\mathcal{U}_p$ に一致する。

証明:

局所環 $\mathcal{O}_p = A_p$ の唯一の極大イデアルを $m_p = pA_p$ とすると、剰余体の定義から $\kappa(p) = A_p/m_p$ である。一般の局所化の代数的な性質により、これは A/p の分数体と同型であるが、(1) の証明ですでに示した通り、剰余環 A/p は局所化を行うまでもなくそれ自身が体である。したがって、分数体をとる操作は自明であり、$\kappa(p) \cong A/p$ となる。

環 A/p の構成は、関数 $f, g \in A$ に対して $f \equiv g \pmod{p} \iff f - g \in p$ という同値関係による商集合である。第4節で証明したイデアルとフィルターの完全な対応辞書を適用すると、 $f - g \in p \iff Z(f-g) \in \mathcal{U}_p$ と翻訳される。

$Z(f-g)$ の定義は「$f(x) = g(x)$ となる X の点全体の集合」である。したがって、この剰余関係は「関数 f と g の値が一致するような集合が、超フィルター $\mathcal{U}_p$ に属している（$=\mathcal{U}_p$ の意味で”ほとんど至る所”で等しい）ならば、これらを同一視する」という同値関係にほかならない。これは数理論理学・モデル理論における超べき $K^X/\mathcal{U}_p$ の定義そのものである。

■

(5) $\mathrm{Spec}(A)$ の各点における局所環 $\mathcal{O}_p$ の記述

【構造】 任意の点 $p \in \mathrm{Spec}(A)$ において、局所環（茎） $\mathcal{O}_p = A_p$ はそれ自身が体（無限小の構造を持たない次元0の点）であり、剰余体 $\kappa(p)$ に完全に一致する（すなわち $A_p \cong A/p$）。

証明:

局所環 A_p が体であることを示すには、A_p 内の唯一の極大イデアルである pA_p が零イデアル (0) であること、すなわち、任意の分子の元 $f \in p$ に対して、局所化の元として $f/1 = 0/1$ が成り立つことを示せば十分である。

$f \in p$ を任意にとる。このとき、f の零点集合 $Z(f)$ の指示関数を $1 - e_f \in A$ とする（$f(x) = 0$ のとき 1、$f(x) \neq 0$ のとき 0 となるべき等関数）。第3節の補題より、 $f \in p \iff e_f \in p$ である。もし $1 - e_f \in p$ でもあると仮定すると、イデアルの加法閉包性から $e_f + (1 - e_f) = 1 \in p$ となり、 p が真のイデアルであることに矛盾する。したがって、必ず $1 - e_f \notin p$ である。これは、指示関数 $1 - e_f$ が局所化の分母として許される集合 $A \setminus p$ の元であることを意味する。

ここで、元の環 A において関数 f と $1 - e_f$ の各点での積を計算すると、すべての $x \in X$ においてどちらか一方が必ず 0 になるため、環の元として $f(1 - e_f) = 0$ が成り立つ。

局所化環における同値関係の定義（$f/1 = 0/1 \iff \exists s \in A \setminus p, s \cdot f = 0$）において、分母の元 $s = 1 - e_f$ を採用するとこれが満たされる。したがって、局所環 A_p 内において $f/1 = 0$ である。

極大イデアルのすべての元が 0 に潰れるため $pA_p = (0)$ であり、局所環 A_p はそれ自身が体となる。よって、自然な全射 $\mathcal{O}_p = A_p \to A_p/pA_p = \kappa(p)$ は同型写像を導き、局所環は剰余体（超べきの体）に完全に一致する。

■